`Preparaduría VI`

1.- i) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Demuestre que la suma de dos productos internos sobre V es un producto interno sobre V. Será la diferencia de productos internos un producto interno? Muestre que todo múltiplo positivo de un producto interno es un producto interno.

ii) Describir explícitamente todos los productos internos sobre $\mathbb{R}^1$ y sobre $\mathbb{C}^1$.

iii) Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno canónico sobre $\mathbb{R}^2$ y sea T una rotación por $\frac{\pi}{2}$. Note que $\langle T\alpha, \alpha \rangle = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^2$. Hallar todos los productos internos $[\cdot, \cdot]$ en $\mathbb{R}^2$ tales que $[T\alpha, \alpha] = 0$, para todo α.

iv) Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno canónico sobre $\mathbb{C}^2$. Demostrar que existe un operador lineal no nulo T en $\mathbb{C}^2$ tal que $\langle \alpha, T\alpha \rangle = 0$ para todo α.

2.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base de V. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre V. Si $c_1, \ldots, c_n$ son n escalares arbitrarios, demuestre que existe exactamente un vector α en V tal que $\langle \alpha, \alpha_i \rangle = c_i$, para todo i.

3.- Sea V un espacio vectorial complejo. Una función $\mathfrak{J}$ de V en V se llama *conjugación* si $\mathfrak{J}(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathfrak{J}(\alpha_1) + \mathfrak{J}(\alpha_2)$, $\mathfrak{J}(c\alpha_1) = \bar{c}\mathfrak{J}(\alpha_1)$, $\mathfrak{J}(\mathfrak{J}(\alpha)) = \alpha$, para todo $\alpha, \beta \in V$. Muestre que el conjunto W de todos los vectores invariantes por una conjugación es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y que para cada $\alpha \in V$ existen vectores únicos γ, $\beta \in W$ tales que $\alpha = \beta + i\gamma$.

4.- Sea V un espacio vectorial complejo y W un subconjunto de W con las siguientes propiedades: a) W es un espacio vectorial real con respecto a las operaciones definidas en V. b) Para cada $\alpha \in V$ existen vectores únicos γ, $\beta \in W$ tales que $\alpha = \beta + i\gamma$. Muestre que la ecuación $\mathfrak{J}\alpha = \beta - i\gamma$ define una conjugación en V tal que $\mathfrak{J}\alpha = \alpha$ si, y sólo si, α pertenece a W y demuestre que $\mathfrak{J}$ es la única conjugación con esta propiedad. Hallar todas las conjugaciones en $\mathbb{C}^1$ y en $\mathbb{C}^2$.

5.- Sean V un espacio vectorial complejo, $\mathfrak{J}$ una conjugación sobre V, W el conjunto de los $\alpha \in V$ tales que $\mathfrak{J}\alpha = \alpha$ y f un producto interno sobre W. Demuestre que: a) Existe un único producto interno g en V que extiende a f. Interprete este resultado en cuanto a la relación que guardan los productos internos canónicos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$. b) $g(\mathfrak{J}\alpha, \mathfrak{J}\beta) = g(\alpha, \beta)$.

6.- i) Considerar $\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ que consta de todos los vectores ortogonales a $\alpha = (1, 0, -1, 1)$ y $\beta = (2, 3, -1, 2)$. Hallar una base de W. Ahora considere $\mathbb{C}^3$ con el producto interno canónico. Hallar una base ortonormal para el subespacio generado por $\beta_1 = (1, 0, i)$, $\beta_2 = (2, 1, 1 + i)$.

ii) Demuestre que el punto de la forma $\xi\,(1,\ldots,1)$ más cercano al punto $(x_1,\ldots,x_n)$ es el que tiene $\xi = \frac{1}{n}\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$.

iii) Piense todas las progresiones aritméticas reales como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión dos. Hallar entonces la progresión aritmética que más se aproxima a $(3,4,6)$.

iv) Hallar el punto en el plano generado por $(1,1,-1,-1)$ y $(1,-1,1,-1)$ que está más cercano a $(3,5,-5,-3)$.

7.- Sea V un espacio con producto interno y $\alpha,\beta \in V$. Demuestre que $\alpha = \beta$ si, y sólo si, $\langle \alpha,\gamma\rangle = \langle \beta,\gamma\rangle$, para todo γ de V.

8.- i) Sea W un subespacio de dimensión finita de un espacio con producto interno V y sea Π la proyección ortogonal de V sobre W. Demuestre que $\langle \Pi\alpha,\beta\rangle = \langle \alpha,\Pi\beta\rangle$ $\forall \alpha,\beta \in V$.

ii) Sea S un subconjunto de un espacio con producto interno V. Demostrar que $\left(S^{\perp}\right)^{\perp}$ contiene al subespacio generado por S. Si V es de dimensión finita, $\left(S^{\perp}\right)^{\perp}$ es el subespacio generado por S.

9.- Suponga $V = W_1 \oplus W_2$ y que f_1, f_2 son productos internos en W_1 y W_2 respectivamente. Demuestre que existe un producto interno único f sobre V tal que $W_2 = W_1^{\perp}$ y que $f\,(\alpha,\beta) = f_k\,(\alpha,\beta)$, donde $\alpha,\beta \in W_k$, $k = 1,2$.

10.- Sea V un espacio con producto interno y W un subespacio de V de dimensión finita. Existen, en general, muchas proyecciones de V que tienen a W como imagen. Una de éstas, la proyección ortogonal sobre W, tiene la propiedad de que $\|\Pi\alpha\| \le \|\alpha\|$, para todo $\alpha \in V$. Demuestre que si Π es una proyección y cumple ésta desigualdad (para todo $\alpha \in V$) entonces Π es la proyección ortogonal sobre W.

11.- Sea V el espacio con producto interno real que consta del espacio de las funciones continuas de valor real sobre el intervalo $[-1,1]$ con el producto interno

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\,(t)\,g\,(t)\;\,dt$$

Sea W el subespacio de las funciones impares. Hallar el complemento ortogonal de W.

12.- Sean $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vectores en un espacio con producto interno V. Sea la matriz $A = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$. Muestre que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son linealmente independientes si y sólo si, A es no singular.

13.- Sea V un espacio con producto interno sobre $\mathbb{R}$. a) Demuestre que si v_1, v_2, v_3 son tres vectores de V tales que $\langle e_i, e_j \rangle < 0$, $i, j = 1, 2, 2$, $i \neq j$ [ésto es, cuyos productos internos dos a dos son negativos], entonces v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes. b) Observe que tres vectores en el plano no pueden tener productos internos negativos dos a dos. Sean e_1, e_2, e_3 vectores unitarios en el plano. Hallar las configuraciones donde $\langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_2, e_3 \rangle + \langle e_3, e_1 \rangle$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

14.- i) Sea V el espacio $\mathbb{C}^2$ dotado de su producto interno canónico. Sea T el operador lineal definido por $T(e_1) = (1, 2)$, $T(e_2) = (i, -1)$. Si $\alpha = (x_1, x_2)$, hallar $T^* \alpha$.

ii) Sea T el operador lineal en $\mathbb{C}^2$ definido por $T(e_1) = (1 + i, 2)$, $T(e_2) = (i, i)$. Usando el producto interno canónico, hallar T^* en la base canónica ordenada.

iii) Sea $V = \mathbb{C}^3$ con el producto interno canónico. Sea T el operador lineal sobre V cuya matriz en la base canónica ordenada está definida por $A_{jk} = i^{j+k}$. Hallar una base para el espacio nulo de T^*.

15.- Sean V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y T un operador lineal sobre V. Demostrar que la imagen por T^* es el complemento ortogonal del Núcleo de T. Si T es inversible, entonces T^* también será inversible. Hallar la inversa.

16.- Demuestre que el producto de dos operadores autoadjuntos es autoadjunto si, y sólo si, éstos conmutan.

17.- En $\mathbb{P}_3[x]$ defina el mismo producto interno que en el ejercicio 11. Responda: a) Es $f(x) = 1$ un vector unitario en $\mathbb{P}_3[x]$? b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio de polinomios escalares. c) Aplique el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ d) Dado un número real t, hallar el polinomio g_t de V tal que $\langle f, g_t \rangle = f(t)$ para todo f de $\mathbb{P}_3[x]$.

18.- Sea V el espacio vectorial de todas las matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$, con el producto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de matrices diagonales.